5-апта.

Тригонометриялық өрнектерді интегралдау әдістері. Дербес жағдайлар.

- Бұл бөлімде біз $\int R(\sin x, \cos x)dx$ түріндегі интегралды табу әдістерін қарастырамыз, мұндағы $R(u,v)$-u,v - ға қатысты рационал функция.
- Мұндай түрдегі интегралдар айнымалыны универсал ауыстыру көмегімен $tg\frac{x}{2}=t$ рационал функцияларды интегралдауға әкелеміз. Шынында да,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \left| \text{бөлшектің алымы мен бөлімін } \cos^2\frac{x}{2} \text{ -қа бөлеміз} \right| =$$

$$= \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$x = 2arctgt$ болғандықтан, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Нәтижесінде: $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt$ мұндағы $R_1(t)$ - рационал функция.

Мысал №1.

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left|tg\frac{x}{2}=t\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=ln|t|+c=ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$$

Көрсетілген әдіс интеграл астындағы өрнек $\sin x$ және $\cos x$ айнымалыларын ұстайтын кез келген функция үшін қолданылмайды, себебі кей жағдайларда бұл белгілеу өте үлкен өрнектерге әкеп соғуы мүмкін. Онда біз мынадай белгілеуді қолданамыз.

Егер интеграл астындағы функция косинус бойынша тақ болса, яғни, $R(\sin x,-\cos x)\equiv -R(\sin x,\cos x)$ болса, онда оны мынадай түрлендіруге әкелеміз:

$$R(\sin x,\cos x)=R_1(\sin x)\cdot\cos x$$

одан кейін интегралда $\sin x=t$ жаңа айнымалысын енгізсек, ол $R_1(t)$ рационал функцияға тәуелді интегралға әкеледі:

$$\int R_1(\sin x)\cos x dx=|\sin x=t|=\int R_1(t)dt$$

Мысал №2.

$$\int cos^3 xdx = \int cos^2 x \cdot coxdx = \int (1 - sin^2 x) cos xdx = \int (1 - sin^2 x) d sin x =$$

$$= |\sin x = t| = \int (1 - t^2) dx = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Егер интеграл астындағы функция синус бойынша тақ болса, яғни $R(-sin x, cos t) \equiv -R(sin x, cos x)$ болса онда оны мынадай түрлендіруге әкелеміз: $R(sin x, cos x) = R_1(cos x) sin x$ одан кейін интегралда $cos x = t$ жаңа айнымалысын енгізсек, ол $R_1(t)$ рационал функцияға тәуелді интегралға әкеледі:

$$\int R_1(cos x) sin xdx = |cos x = t| = -\int R_1(t) dt$$

Егер интеграл астындағы функция $R(-sin x, -cos x) \equiv R(sin x, cos x)$ теңдігін қанағаттандырса, онда оны мынадай түрлендіруге әкелеміз: $R(sin x, cos x) = R_1(tgx)$ одан кейін интегралда айнымалыны ауыстырсақ: $tgx = t$, $x = arctgt$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Онда рационал функцияның интегралына әкеледі.

Мысал №3.

$$\int \frac{sin^3 x}{cos^3 x}dx = \int tg^3 xdx = \left| tgx = t, dx = \frac{1}{1+t^2}dt \right| = \int \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int \frac{t^2 t}{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{1+t^2}dt^2 = \left| t^2 = z \right| = \frac{1}{2}\int \frac{(z+1)-1}{z+1}dz = \frac{1}{2}\left(\int dz - \int \frac{dz}{z+1} \right) = \frac{1}{2}(z - ln|z+1|) + C =$$

$$= \left| z = t^2 = tg^2 x \right| = \frac{1}{2}(tg^2 x - ln(tg^2 x + 1)) + C$$

Мына түрдегі интегралдар: $\int \sin mx \cos nxdx,\ \int \cos mx \cos nxdx,\ \int \sin mx \sin nxdx$, мұндағы m, n – тұрақты сандар, берілсе, онда интеграл астындағы функция мына формулалардың көмегімен синус пен косинустардың қосындысына келеді:

$$sin\alpha\, cos\beta = \frac{1}{2}(sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta)),$$

$$cos\alpha\, cos\beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)),$$

$$sin\alpha\, sin\beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)).$$

Мысал №4.

$$\int sin3x\,sin5xdx = \frac{1}{2}\int(cos2x - cos8x)dx = \frac{1}{2}\int cos2xdx - \frac{1}{2}\int cos8xdx =$$
$$= \frac{1}{4}sin2x - \frac{1}{16}sin8x + C$$

$\int \sin^m x \cos^n xdx$ түріндегі интеграл, мұндағы m және n – кез келген бүтін көрсеткіштер.

Егер тым болмағанда m немесе n көрсеткіштерінің біреуі тақ бүтін оң сан болса, мысалы $n = 2k+1$, онда $sin\,x = t$ деп белгілейміз:

.

$$\int sin^m x \bullet cos^n xdx = \int sin^m x\,cos^{2k} x\,cos\,xdx = \int sin^m x(1 - sin^2 x)^k d\,sin\,x = \int t^m (1 - t^2)^k dt$$

Мысал №5.

$$\int sin^2 x\,cos^3 xdx = \int sin^2 x(1 - sin^2 x)d\,sin\,x = \int t^2(1 - t^2)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C$$

$$= \frac{1}{3}sin^3 x - \frac{1}{5}sin^5 x + C.$$

Егер m және n көрсеткіштерінің екеуі де жұп, оң, бүтін сан болса, онда мына формулаларды қолданған жөн:

$$sin^2 x = \frac{1 - cos\,2x}{2}, cos^2 x = \frac{1 + cos\,2x}{2}$$

Мысал №6.

$$\int sin^2 x \cdot cos^2 xdx = \int \frac{(1 - cos\,2x)(1 + cos\,2x)}{4}dx = \int \frac{(1 - cos^2 2x)}{4}dx =$$

.

$$= \frac{1}{4}\int\left(1 - \frac{1 + cos\,4x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos\,4x\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}sin\,4x\right) + C$$